“Geometría en la escuela secundaria: discusiones en torno a su enseñanza”

Débora Alegrini – Erika Verandi

Correo: alegrini_83@hotmail.com / erikaverandi@hotmail.com

Teniendo en cuenta el Capítulo 3 “**La entrada en el trabajo argumentativo**” en Itzcovich, H. “Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones”. Buenos Aires, Serie Formación Docente. Libros del Zorzal, 2005 (pág. 41 a 64).
En búsqueda de una respuesta a la pregunta formulada por el autor en la pág. 41: **¿Cómo conocer el espacio de conocimientos que tienen los alumnos, necesarios en principio para abordar la demostración de una cierta propiedad?** Se han realizado las siguientes actividades:

ACTIVIDAD Nº1:

a) Lea las distintas demostraciones de la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y su posterior análisis (pág. 42 a 49).
b) Seleccione otra propiedad geométrica (sencilla y que aparezca en los diferentes “problemas geométricos” que desarrollamos en Secundaria Básica).
c) ¿Qué demostraciones podríamos gestionar en la clase?
d) ¿Qué conocimientos mínimos deberían tener los alumnos para poder abordar cada una de ellas?

Respuestas:

b) La propiedad elegida es: **Propiedad Pitagórica** (Triángulos rectángulos).

c)

Demostración Empírica:

Tomemos sin pérdida de generalidad un triángulo rectángulo cuyos lados miden $a = 4$ unidades , $b = 3$ unidades y $c = 5$ unidades de magnitud, según la **Figura 1**:

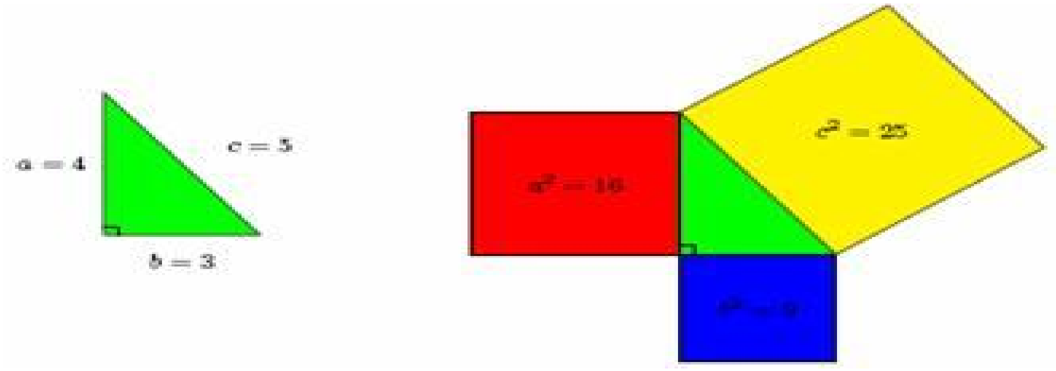


Figura 1: A la izquierda se muestra un triángulo rectángulo notable de longitudes 3, 4 unidades en los catetos y 5 unidades en la hipotenusa. A la derecha tenemos el mismo triángulo rectángulo notable con unos cuadrados *construidos* sobre sus lados.

Imagen extraída en : http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_03.php

Dibujemos ahora en cada lado del triangulo rectángulo unos cuadrados de igual tamaño de lado, esto es, tres cuadrados de 3, 4 y 5 unidades de lado, veamos la **Figura 1** de arriba y a la derecha. Luego, si dividimos cada cuadrado en tantos cuadraditos como unidades tenga los cuadrados originales aplicando una *aprehensión operativa de cambio figural*, tenemos lo siguiente de acuerdo con la **Figura 2** de abajo y a la izquierda**:**

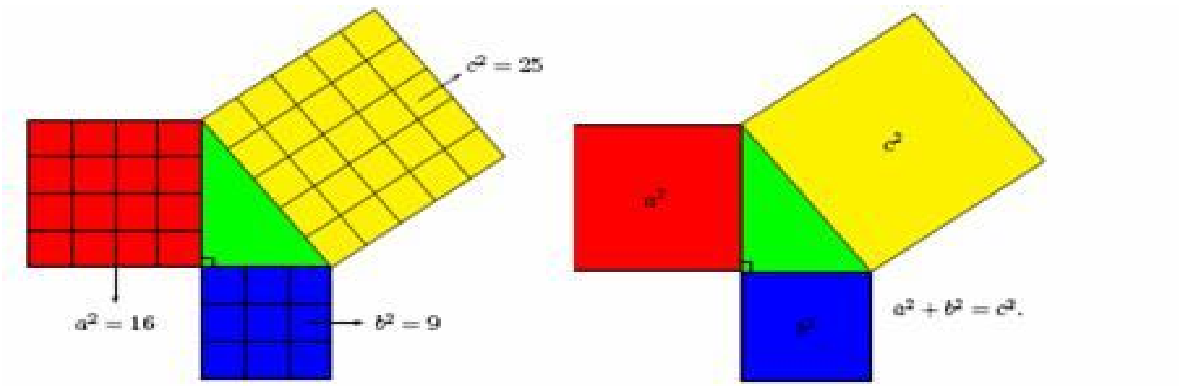
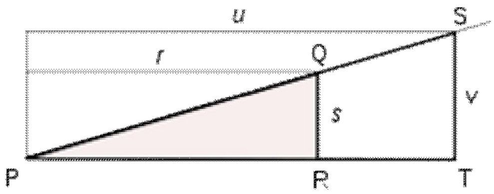


Figura 2: A la izquierda mostramos la *aprehensión operativa de cambio figural* realizada en el triángulo rectángulo notable dado anteriormente. Y a la derecha el mismo triángulo rectángulo notable con la conclusión obtenida en este caso.

Y nos podemos dar cuenta que la suma de los cuadraditos del cuadrado de lado a mas los cuadraditos del cuadrado de lado b nos dan la cantidad de cuadraditos que esta en el cuadrado de lado c. Así, mediante un *razonamiento como un proceso configural*, coordinando la *aprehensión discursiva* y *operativa* nos queda que se cumple lo mostrado en la **Figura 2** dada arriba y a la derecha. Luego, cambiando del *anclaje visual* al *anclaje discursivo*, se obtiene esa *conjetura sin demostración* mostrada también en la **Figura 2** dada arriba y a la derecha.

Demostración Intelectual:



La relación entre las superficies de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza. En esto pudo haberse basado Pitágoras para demostrar su teorema

Los triángulos PQR y PST son semejantes, de manera que:

$$\frac{r}{u} = \frac{s}{v} = r$$

Siendo r la razón de semejanza entre dichos triángulos. Si ahora buscamos la relación entre sus superficies:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}(rs)$$

$$S_{PST} = \frac{1}{2}(uv)$$

Obtenemos después de simplificar que:

$$\frac{S_{PQR}}{S_{PST}} = \frac{rs}{uv} = \frac{r}{u} \cdot \frac{s}{v}$$

Pero siendo $\frac{r}{u} = \frac{s}{v} = r$ la razón de semejanza, está claro que:

$$\frac{S_{PQR}}{S_{PST}} = \left(\frac{r}{u}\right)^2 = \left(\frac{s}{v}\right)^2$$

Es decir, *"la relación entre las superficies de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza"*.

Aplicando ese principio a los triángulos rectángulos semejantes ACH y BCH tenemos que:

$$\frac{S_{ACH}}{S_{BCH}} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

que de acuerdo con las propiedades de las proporciones nos da:

$$\frac{S_{ACH}}{b^2} = \frac{S_{BCH}}{a^2} = \frac{S_{ACH} + S_{BCH}}{b^2 + a^2} \quad \textbf{(I)}$$

y por la semejanza entre los triángulos ACH y ABC resulta que:

$$\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{b}{c}\right)^2$$
$$\frac{S_{ACH}}{b^2} = \frac{S_{ABC}}{c^2}$$

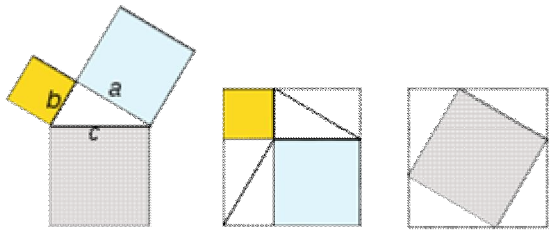
Pero según **(I)** $\frac{S_{ACH}}{b^2} = \frac{S_{ACH} + S_{BCH}}{b^2 + a^2}$, así que:

$$\frac{S_{ACH} + S_{BCH}}{b^2 + a^2} = \frac{S_{ABC}}{c^2}$$

Y por lo tanto:

$$b^2 + a^2 = c^2$$

Quedando demostrado el teorema de Pitágoras.



Los cuadrados compuestos en el centro y a la derecha tienen áreas equivalentes. Quitándoles los triángulos el teorema de Pitágoras queda demostrado.

Es asimismo posible que Pitágoras hubiera obtenido una demostración gráfica del teorema.

Partiendo de la configuración inicial, con el triángulo rectángulo de lados ***a***, ***b***, ***c***, y los cuadrados correspondientes a catetos e hipotenusa –izquierda-, se construyen dos cuadrados diferentes:

- Uno de ellos –centro- está formado por los cuadrados de los catetos, más cuatro triángulos rectángulos iguales al triángulo inicial.
- El otro cuadrado –derecha- lo conforman los mismos cuatro triángulos, y el cuadrado de la hipotenusa.

Si a cada uno de estos cuadrados les quitamos los triángulos, evidentemente el área del cuadrado gris (c^2) equivale a la de los cuadrados amarillo y azul ($b^2 + a^2$), habiéndose demostrado el teorema de Pitágoras.

d) <u>Conocimientos mínimos que deben tener los alumnos</u>:

- Definición de triángulos rectángulos.
- Triángulos congruentes
- Áreas y unidades.
- Potenciación.
- Semejanzas de figuras.

ACTIVIDAD Nº2:

Pensando en generar condiciones para que los alumnos vayan elaborando su PROPIA CAJA DE HERRAMIENTAS y vayan enriqueciendo sus posibilidades de ganar autonomía frente a la producción de demostraciones, proponer:

¿Cuáles son las propiedades de partida, que usted considera, para la entrada en el "trabajo con argumentos deductivos"?

¿Cuáles son los recursos y técnicas que son propios de los procesos de demostración en geometría?

Tener en cuenta lo que nos dice el autor en el ítem 3.1 Conocimientos y recursos necesarios para "entrar en el juego deductivo" (pág. 49- 50). Ampliar en cuanto a nuevas propuestas, como es el uso de las Nuevas Tecnologías.

Las propiedades de partida, son las propiedades que los alumnos traen de años anteriores, otras que tienen ciertos grados de evidencias y otras que resultan fundamentales como:

- Elementos geométricos fundamentales (punto, recta y plano)
- Rectas (coplanares y alabeadas).
- Mediatriz, bisectriz. (Trazados)
- Sistema sexagesimal.
- Clasificación de los ángulos.
- Triángulos: Elementos y clasificación.
- Nombres de diferentes cuadriláteros.
- Áreas de figuras sencillas.

Los recursos son: La observación y la utilización de la regla graduada y no graduada, escuadras, compás, semicírculos y computadora.

Las técnicas son:

- Trazar: mediatriz, bisectriz, medianas y alturas.
- Construir y medir diferentes figuras.
- Trazar: rectas coplanares y alabeadas.
- Construir segmentos, ángulos y figuras congruentes.

Bibliografía utilizada:

- Berio, Adriana y otros. MATEMATICA 7. Puertos de Palos.S.A. 2006.
- Sitios de Internet: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_03.php
- Sitios de Internet: http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras
- Díaz, Adriana y otros. AVENTURA MATEMATICA 7. Aique Grupo Editor. S.A.2010.